

Сходимость последовательностей случайных величин. Закон больших чисел

октябрь–декабрь 2023 г.

Курс лекций «Теория вероятностей»

- Сходимость последовательностей случайных величин
 - Сходимость почти на верное
 - Сходимость по вероятности
 - Сходимость по распределению
- Неравенства
- Закон больших чисел

Сходимость последовательностей случайных величин

Мы будем изучать две предельные теоремы: закон больших чисел и центральную предельную теорему. Поскольку в них речь идет о сходимости последовательности случайных величин, следует сначала прояснить, что это значит.

Пусть на вероятностном пространстве задана последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ случайных величин и ξ — случайная величина.

Определение (сходимость почти наверное)

Последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ случайных величин *сходится почти наверное* к случайной величине ξ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \quad \text{почти для всех } \omega \in \Omega,$$

т. е. $P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1$, обозначение $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ (п. н., a. s.).

Определение (сходимость по вероятности)

Последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ случайных величин *сходится по вероятности* к случайной величине ξ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0,$$

обозначение $p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$.

Связь сходимостей почти всюду и по вероятности

Можно показать, что

- из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности;
- если $p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$, то существует подпоследовательность $\{\xi_{n_k}, k = 1, 2, \dots\}$, такая что $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k} = \xi$ п. н.

Сходимость по распределению

Определение (сходимость по распределению)

Последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ случайных величин *сходится по распределению* к случайной величине ξ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

в каждой точке непрерывности функции $F(x)$, где $F_n(x)$, $F(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_n , ξ соответственно. Обозначение $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ или $\xi_n \xrightarrow{d} F(\cdot)$.

Сходимость по распределению: пример

Почему есть требование о сходимости только в точках непрерывности функции распределения предельной случайной величины?

Пусть $Z \sim N(0, 1)$ — стандартная нормальная случайная величина, и пусть $\xi_n = Z/n$. Тогда не вызывает сомнения тот факт, что последовательность $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится к нулю в любом разумном смысле.

Пусть $x < 0$. Тогда $F_n(x) = P(Z/n \leq x) = \Phi(nx) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если $x > 0$, то $F_n(x) = \Phi(nx) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

В то же время в силу симметрии распределения каждой случайной величины ξ_n выполнено равенство $F_n(0) = 1/2$.

Сходимость по распределению: продолжение примера

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функция $G(\cdot)$ даже не является функцией распределения, т. к. в точке 0 она не является непрерывной справа. А все дело в том, что в нуле функция распределения предельной случайной величины (т. е. нуля) разрывна.

Связь сходимости по распределению с другими видами сходимости

Можно показать, что

- из сходимости по вероятности вытекает сходимость по распределению;
- из сходимости почти наверное вытекает сходимость по распределению.

Сходимость по распределению к константе

Предложение

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных величин, по распределению сходящихся к постоянной случайной величине c . Тогда $p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = c$, т. е. последовательность сходится и по вероятности.

Доказательство.

Так как $\xi_n \xrightarrow{d} c$, то при любом $x > c$ последовательность $F_n(x) \rightarrow F_c(x) = 1$, а при любом $x < c$ последовательность $F_n(x) \rightarrow F_c(x) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - c| \geq \varepsilon) &= 1 - P(|\xi_n - c| < \varepsilon) = 1 - P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) = 1 - F_n(c + \varepsilon -) + F(c - \varepsilon) \\ &\leq 1 - F_n(c + \varepsilon) + F(c - \varepsilon) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $F_n(c + \varepsilon) \rightarrow 1$ и $F(c - \varepsilon) \rightarrow 0$. □

Теорема (Манн – Вальд)

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность случайных величин, и пусть $g(\cdot)$ — непрерывная в $\mathbb{R}$ функция. Тогда

1. если $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$, то $g(\xi_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} g(\xi)$;
2. если $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$, то $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$;
3. если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, то $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$.

Неравенство Маркова

Предложение (неравенство Маркова)

Пусть $\xi \geq 0$ — неотрицательная случайная величина и $a > 0$. Тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E(\xi)}{a}.$$

Доказательство.

Рассмотрим случайную величину η , равную 0, если $\xi < a$, и равную a , если $\xi \geq a$. Так как $\eta \leq \xi$, то $E(\eta) \leq E(\xi)$. И так как $E(\eta) = aP(\xi \geq a)$, то $aP(\xi \geq a) \leq E(\xi)$, откуда и следует искомое неравенство. □

Если ξ имеет плотность, то можно так:

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_a^{+\infty} xf(x)dx \geq a \int_a^{+\infty} f(x)dx = aP(\xi \geq a).$$

Неравенство Маркова: пример

Пример

Пусть число деталей, которые фабрика производит за неделю, является случайной величиной с матожиданием 50. Оцените вероятность того, что выпуск за неделю превысит 75.

По неравенству Маркова

$$P(X > 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

Неравенство Чебышева

Следствие (неравенство Чебышева)

Пусть X — случайная величина и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство.

Обозначим $\xi = (X - E(X))^2 \geq 0$. Тогда из неравенства Маркова

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P(\xi \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$



Часто неравенство Чебышева используют в следующей форме:

$$P(|X - m_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{\sigma_X^2}{k^2\sigma_X^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Неравенство Чебышева: пример

Пример

Пусть число деталей, которые фабрика производит за неделю, является случайной величиной с матожиданием 50 и дисперсией 25. Оцените вероятность того, что выпуск за неделю будет находиться между 40 и 60.

По неравенству Чебышева

$$P(40 < X < 60) = 1 - P(|X - 50| \geq 10) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{10^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Точность неравенства Чебышева: равномерное распределение

Пусть X распределена равномерно на отрезке $[0, 10]$. Тогда $E(X) = 5$ и $\text{Var}(X) = 10^2/12 = 25/3$. Из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X - 5| \geq 4) \leq \frac{25}{3 \cdot 4^2} \approx 0.52,$$

в то время, как истинное значение этой вероятности равно 0.2.

Точность неравенства Чебышева: нормальное распределение

Пусть X подчиняется нормальному распределению $N(\mu, \sigma^2)$. Из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{4} = 0.25,$$

в то время, как истинное значение этой вероятности равно

$$P(|X - \mu| \geq 2\sigma) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \geq 2\right) = 2(1 - \Phi(2)) \approx 0.0456.$$

Неравенства Маркова и Чебышева обычно дают очень неточные оценки. Но ослабить их нельзя (существуют распределения, для которых эти неравенства превращаются в равенства).

Закон больших чисел

Теорема (закон больших чисел)

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$E(\xi_n) = m, \quad \text{Var}(\xi_n) = \sigma^2.$$

Тогда

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m.$$

Доказательство.

Обозначим $X_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m$. Тогда $E(X_n) = 0$, $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 / n$. Из неравенства Чебышева следует, что

$$P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и означает сходимость X_n к нулю и сходимость $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ к m по вероятности.



Усиленный закон больших чисел

Оказывается, используя более продвинутые методы, можно доказать, что в законе больших чисел выполняется сходимость почти наверное:

Теорема (усиленный закон больших чисел)

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$E(\xi_n) = m, \quad \text{Var}(\xi_n) = \sigma^2.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m, \quad \text{п. н.}$$

При этом можно даже отказаться от условия $E(\xi_i^2) < +\infty$.

Закон больших чисел: метод Монте-Карло

Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0, 1]$, и пусть $g(x)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция. Тогда последовательность $\{g(\xi_n), n = 1, 2, \dots\}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных величин с конечным вторым моментом, и по закону больших чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(\xi_1) + \dots + g(\xi_n)}{n} = E(g(\xi_i)) = \int_0^1 g(x) dx.$$

Этот метод вычисления интеграла называется методом Монте-Карло.

Неравенство Иенсена

Предложение (неравенство Иенсена)

Пусть $g(x)$ — выпуклая функция, ξ — случайная величина. Тогда $E(g(\xi)) \geq g(E(\xi))$, если оба математических ожидания существуют.

Доказательство.

Докажем для гладкой функции $g(x)$. Обозначим $\mu = E(\xi)$. Для выпуклой функции $g(x)$ справедливо неравенство

$$g(x) \geq g(\mu) + g'(\mu)(x - \mu)$$

(график выпуклой функции лежит выше ее касательной). Поэтому

$$g(\xi) \geq g(\mu) + g'(\mu)(\xi - \mu),$$

откуда

$$E(g(\xi)) \geq E(g(\mu) + g'(\mu)(\xi - \mu)) = E(g(\mu)) + g'(\mu)E(\xi - \mu) = g(\mu) = g(E(\xi)).$$



Неравенство Иенсена: продолжение

Предложение (неравенство Иенсена для вогнутой функции)

Пусть $g(x)$ — **вогнутая** функция, ξ — случайная величина. Тогда $E(g(\xi)) \leq g(E(\xi))$, если оба математических ожидания существуют.

Предложение (неравенство Иенсена для строго выпуклой/вогнутой функции)

Пусть $g(x)$ — **строго выпуклая (строго вогнутая)** функция, ξ — невырожденная случайная величина. Тогда $E(g(\xi)) > g(E(\xi))$ ($E(g(\xi)) < g(E(\xi))$), если оба математических ожидания существуют.

Неравенство Иенсена: неожиданное приложение

Доказать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Прологарифмируем левую и правую части:

$$\ln \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n}.$$

Рассмотрим дискретную случайную величину ξ , принимающую значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $1/n$ каждое. Тогда, поскольку $\ln x$ вогнутая, то согласно неравенству Иенсена

$$\ln E(\xi) = \ln \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq E(\ln \xi) = \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n}.$$

(Из строгой вогнутости $\ln x$ можно сделать вывод о том, что если $x_1, \dots, x_n$ не все одинаковые, то неравенство строгое.)

- [1] Sh. Ross. *A First Course in Probability*. 9th ed. London: Pearson, 2014.
- [2] Б. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей*. М.: Издательство УРСС, 2005.
- [3] С. В. Головань, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. *Сборник задач по курсу теории вероятностей*. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021.

Для заметок