Классическое определение вероятности. Свойства вероятности

октябрь–декабрь 2023 г.

Курс лекций «Теория вероятностей»

Оглавление

Обозначения

- $A \cup B$ — объединение множеств A и B: элементы, принадлежащие хотя бы одному из этих множеств, аналогично $\bigcup_i A_i$
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B: элементы, принадлежащие каждому из этих множеств, аналогично $\bigcap_i A_i$
- $A \setminus B$ — разность множеств A и B: элементы множества A, не принадлежащие множеству B
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение к множеству A: разность объемлющего множества Ω и A
- $\sum_i P_i = P_1 + P_2 + p_3 + \ldots$ — сумма чисел (быть может бесконечная)

Эксперимент со случайным исходом

- «принципиальная» недетерминированность исхода
- возможность (по крайней мере, теоретическая) многократного повторения
- знание множества всех возможных исходов

Эксперимент со случайным исходом: пример 1

Эксперимент — это пятикратное подбрасывание монеты, тогда, например, $\omega = (1, 0, 0, 1, 0)$ — это элементарный исход (1 — орел, 0 — решка). Любой элементарный исход можно описать как последовательность $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)$. Нетрудно понять, что в этом эксперименте всего 2^5 различных элементарных исходов.

Эксперимент со случайным исходом: пример 2

Последовательный (упорядоченный) выбор двух карт без возвращения из стандартной колоды, содержащей 52 карты. Любой элементарный исход можно описать как $\omega = (a_1, a_2)$, причем $a_1 \neq a_2$. Ясно, что имеется $52 \cdot 51$ различных исходов.

Эксперимент со случайным исходом: пример 3

Однократное подбрасывание двух (различимых) кубиков. Любой элементарный исход — упорядоченная пара чисел $\omega = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Ясно, что общее число исходов равно 36.

Эксперимент со случайным исходом: пример 4

Подбрасывание кубика до первого появления «6». Каждый элементарный исход можно описать последовательностью $\omega_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1)$, $n = 1, 2, \dots$.

Множество исходов бесконечное, но счетное.

Эксперимент со случайным исходом: пример 5

Время ожидания автобуса, который ходит с интервалом 10 минут. Элементарный исход — точка $\omega \in [0, 10]$. Множество исходов несчетное.

Эксперимент со случайным исходом: пример 6

Доходность акции в конце торгового вторника. Множество исходов — вся числовая прямая.

Случайное событие

Важнейшее понятие — случайное событие (или просто событие). Вообще говоря, конкретное событие может произойти, если реализуется один из нескольких элементарных исходов.

Например, событие

$$\{\text{при подбрасывании двух кубиков сумма очков равна } 10\}$$

реализуется при трех элементарных исходах: $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$. Таким образом, случайное событие целесообразно рассматривать, как набор элементарных исходов, его составляющих.

Вероятность события

Как понимать вероятность $P(A)$ случайного события A? Первоначально использовалось «наивное» или частотное определение вероятности. Пусть эксперимент повторен независимо n раз, и пусть в m случаях появилось событие A. Число m называется частотой появления события A, число $p_n = m/n$ — относительной частотой появления события A. Вероятность события A понималась как $\lim_{n\to\infty} p_n$. Однако строить строгую математическую теорию на основе такого определения трудно, почти невозможно. Поэтому сейчас используется стандартный аксиоматический подход. Основой современной формализации является понятие вероятностного пространства.

Вероятностное пространство

Математическая модель эксперимента со случайными исходами — вероятностное пространство. Вероятностное пространство состоит из трех объектов:

- пространство элементарных исходов, обозначение Ω
- семейство случайных событий, обозначение $\mathcal{F}$
- вероятность, обозначение P

Пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов (ПЭИ, sample space) Ω — множество произвольной природы (абстрактное множество). Типичный элементарный исход будем обозначать $\omega \in \Omega$.

Говоря неформально, ПЭИ — это множество всех возможных исходов рассматриваемого эксперимента со случайным исходом. Поскольку исходы реальных экспериментов могут иметь самую различную природу (числа, графические образы, последовательности букв и т. п.), то для общей теории нецелесообразно фиксировать структуру ПЭИ.

Пространство элементарных исходов: примеры

В рассмотренных выше примерах:

1. $\Omega = \{\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5), \varepsilon_i = 0, 1, i = 1, \dots, 5\}$, $\#\Omega = 2^5$
2. $\Omega = \{\omega = (a_1, a_2), a_1 \neq a_2, a_1, a_2 = 1, \dots, 52\}$, $\#\Omega = 52 \cdot 51$
3. $\Omega = \{\omega = (m_1, m_2), m_1, m_2 = 1, \dots, 6\}$, $\#\Omega = 36$
4. $\Omega = \{\omega_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1), n = 1, 2, \dots\}$, множество Ω счетное
5. $\Omega = [0, 10]$, множество Ω несчетное

Пространство элементарных исходов: еще пример

6. Более «экзотический» пример. Некто подбрасывает монету и если выпал орел, то он решает ехать в университет и идет на остановку автобуса из примера 5. Если же выпала решка, он просто один раз подбрасывает кубик. В этом случае пространство элементарных исходов можно описать так: $\Omega = \{\omega = (0, m), m = 1, \dots, 6\} \cup \{\omega = (1, x), x \in [0, 10]\}$.

Случайное событие

Случайное событие (random event) A — это подмножество ПЭИ: $A \subset \Omega$.

В примере 1 множество $A = \{\omega \in \Omega : \varepsilon_1 = 1\}$ — это событие, состоящее в том, что при первом подбрасывании выпал орел.

В примере 3 множество $A = \{\omega : m_1 + m_2 = 8\}$ задает событие, состоящее в том, сумма выпавших очков равна восьми.

В примере 4 множество $A = \{\omega_n : n \leqslant 20\}$ соответствует событию, что потребовалось не более 20 подбрасываний до первого появления «6».

В примере 5 множество $A = [3, 5]$ соответствует событию, что время ожидания не меньше трех, но не больше пяти минут.

Случайное событие (продолжение)

Если задано множество (случайное событие) $A \in \Omega$ и $\omega \in A$, то говорят, что элементарный исход ω благоприятствует появлению события A.

Случайными событиями является все пространство Ω — достоверное событие, и пустое множество $\varnothing$ — невозможное событие.

Действия с событиями

Пусть $A, B, A_1, A_2, \ldots$ — случайные события (подмножества ПЭИ Ω).

- объединение (union) $A \cup B$, A или B, аналогично $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — конечное или бесконечное объединение;
- пересечение (intersection) $A \cap B$, A и B, аналогично $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ — конечное или бесконечное пересечение;
- дополнение (complement) $\overline{A} = \Omega \setminus A$ — противоположное событие.

Если $A \cap B = \varnothing$, то события называются *несовместными* (disjoint, mutually exclusive).

Будем обозначать семейство всех случайных событий через $\mathcal{F}$.

Вероятность

Каждому случайному событию A приписывается число $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, называемое вероятностью события A. Иными словами, вероятность — это функция, принимающая числовые значения, аргументами которой являются случайные события:

$$P \colon \mathcal{F} \to [0, 1].$$

Эта функция должна удовлетворять формулируемым ниже требованиям, называемым аксиомами вероятности.

Аксиомы вероятности

Аксиомы вероятности

1. $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$
2. Счетная аддитивность: пусть $A_1, A_2, \ldots$ — случайные события и пусть $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, тогда
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Вероятностное пространство

Определение
Набор $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется *вероятностным пространством* (probability space).

Можно проверить, что

- выполнено свойство конечной аддитивности: если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
- выполнено свойство монотонности: если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$
- справедливо равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Измеримые множества

Замечание
Мы считали случайным событием любое подмножество пространства Ω, *т. е.* $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, *и это так, если пространство* Ω *конечное или счетное. Если же пространство* Ω *несчетное (например,* $\Omega = [0, 10]$*), то не любое подмножество* Ω *является случайным событием. Если же* $A \subset \Omega$ *— случайное событие, то такое множество* A *называют измеримым (measurable set).*

Примеры вероятностных пространств

- Дискретное вероятностное пространство, в том числе классическая схема
- Непрерывное вероятностное пространство, в том числе геометрическая вероятность

Дискретное вероятностное пространство

Предположим, что задано вероятностное пространство, у которого ПЭИ Ω — конечное или счетное множество, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$. В этом случае всегда считается, что $\mathcal{F}$ — это множество всех подмножеств. Если задана вероятность, то возникают числа

$$p_i = P(\{\omega_i\}) \geqslant 0, \; i = 1, 2, \dots, n, \dots .$$

Дискретное вероятностное пространство: аксиомы

Поскольку все пространство Ω представимо в виде конечного или счетного объединения своих попарно непересекающихся одноточечных подмножеств, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega_i\}$, то из нормировки и аддитивности вероятности следует, что

1. $p_i \geqslant 0$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

При этом опять же в силу аддитивности вероятность любого события есть

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i. \tag{1}$$

Действительно, $A = \bigcup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}$, и эти множества попарно не пересекаются.

Дискретное вероятностное пространство: распределение

Часто набор чисел $p_i = P(\{\omega_i\})$, удовлетворяющих условиям 1 и 2, называют распределением на Ω.

Каким образом выбирать распределение определяется конкретной ситуацией.

Дискретное вероятностное пространство: верно и обратное

Если взять набор чисел $\{p_i, i = 1, \dots, n, \dots\}$, удовлетворяющих условиям 1, 2, и определить вероятность любого события равенством (1), то получится корректное вероятностное пространство. Действительно, доказательства требует только счетная аддитивность вероятности. Покажем это.

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — счетная система попарно непересекающихся событий и пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Будем использовать следующее свойство: в сходящемся ряду с неотрицательными членами можно произвольно переставлять слагаемые без изменения суммы ряда. Имеем:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i:\omega_i \in A_n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Второе равенство верно, так как каждый элемент $\omega_i \in A$ входит в одно и только в одно множество A_n.

Дискретное вероятностное пространство: вывод

Таким образом, любая вероятность на дискретном пространстве задается набором $\{p_i, i = 1, \ldots, n, \ldots\}$ с условиями 1, 2, и вероятность любого события определяется равенством (1).

Классическая вероятность (классическая схема)

Частный случай — так называемая *классическая схема* или *классическая вероятность*: пространство Ω конечно, $\#\Omega = N$ и все элементарные исходы равновероятны (и, следовательно, имеют вероятность $1/N$). В этом случае $P(A) = N_A/N$ для любого события A, где N_A — количество элементарных исходов в A. Иными словами, нахождение вероятности любого события сводится к подсчету числа элементарных исходов, составляющих это событие. Именно к этой схеме сводятся многочисленные задачи, связанные с подбрасыванием монет, кубиков, вытаскиванием шаров из коробок и т. п. И здесь начинается комбинаторика…

Классическая вероятность: пример

Пример
В доме 11 этажей. На первом этаже в лифт зашли 10 человек. Каждый из них равновероятно и независимо от остальных может выйти на любом из десяти этажей. Чему равна вероятность того, что все 10 человек выйдут на разных этажах?

Классическая вероятность: разбор примера

Любой элементарный исход может быть представлен последовательностью $\omega = (n_1, \dots, n_{10})$, где n_i — номер этажа, на котором выходит i-й человек, $i = 1, \dots, 10$. Каждое число n_i может принимать любое значение 2, 3, ..., 11 независимо от стальных значений n_j. Поэтому общее число исходов $\#\Omega = 10^{10}$. По условию задачи можно считать все исходы равновероятными.

Благоприятствующими являются те исходы $\omega = (n_1, \dots, n_{10})$, у которых все числа n_1, ..., n_{10} разные, т. е. когда $(n_1, \dots, n_{10})$ представляет перестановку чисел 2, 3, ..., 11. Число таких перестановок равно 10!. Искомая вероятность равна

$$P = \frac{10!}{10^{10}} = 0.000363.$$

Выборки

Пусть есть n различных предметов, например, шаров, занумерованных числами от 1 до n, и из этого множества совершается выборка объема k. Число различных выборок зависит от двух обстоятельств:

- выборка упорядоченная или неупорядоченная;
- выборка с возвращением или без возвращения.

Упорядоченная выборка с возвращением

Результат однозначно описывается последовательностью $\omega = (r_1, \dots, r_k)$, где r_i — номер шара, вынутого на i-м шаге.

Ясно, что $1 \leqslant r_i \leqslant n$, $i = 1, \dots, k$ и, значит, $\#\Omega = n^k$.

Упорядоченная выборка без возвращения

Очевидно, что $k \leqslant n$. Результат, как и раньше описывается последовательностью $\omega = (r_1, \ldots, r_k)$, где $1 \leqslant r_i \leqslant n$, $i = 1, \ldots, k$, но добавляется ограничение, что все числа r_i разные. В этом случае $\#\Omega = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$ — число размещений из n по k. При $k = n$ получаем $A_n^n = P_n = n!$ — число перестановок (permutation) n элементов.

Неупорядоченная выборка без возвращения

Очевидно, что $k \leqslant n$. В этом случае любая выборка объема k — это подмножество объема k исходного множества из n элементов. Обозначим число таких выборок (подмножеств) символом C_n^k, англоязычное обозначение $\binom{n}{k}$.

Нетрудно понять, что каждое подмножество объема k порождает $k!$ различных упорядоченных выборок без возвращения путем перестановок элементов этого подмножества. И обратно, все упорядоченные выборки объема k, содержащие одни и те же элементы, соответствуют одной неупорядоченной выборке, и перебирая все неупорядоченные выборки, с помощью этой процедуры можно получить все упорядоченные выборки объема k. Таким образом, $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^{n-k}$.

Число сочетаний

Число C_n^k называется числом сочетаний (combinations) n элементов по k.

Числа C_n^k, $k = 0, \ldots, n$ часто называют биномиальными коэффициентами, поскольку справедливо следующее равенство (бином Ньютона):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Выборка: пример

В коробке $n - 1$ белых шаров и один красный шар. Случайно по схеме неупорядоченной выборки без возвращения выбирается $1 \leqslant k \leqslant n$ шаров. Чему равна вероятность того, что красный шар попадет в выборку?

Выборка: разбор примера

Общее число выборок $N = C_n^k$, число выборок, в которые попадает красный шар равно $M = C_1^1 \cdot C_{n-1}^{k-1}$. Искомая вероятность равна $M/N = k/n$ — результат, согласующийся с интуицией.

Счетное вероятностное пространство

Ясно, что если пространство элементарных исходов счетное, то вероятности всех элементарных исходов не могут быть одинаковыми.

Счетное вероятностное пространство: пример

Подбрасывание кубика до первого появления «6». В этом случае $\Omega = \{\omega_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1), n = 1, 2, \dots\}$. Обозначим через $p = 1/6$ вероятность «успеха», через $q = 1 - p = 5/6$ вероятность «неудачи». Используя пока что интуитивное понятие независимости, положим по определению $p_n = P(\{\omega_n\}) = q^{n-1}p$. Нетрудно проверить, что это корректное распределение (вспомним сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Эта схема называется «испытание до первого успеха».

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}p = p(1 + q + q^2 + \dots) = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

Непрерывные вероятностные пространства

Невозможно ограничиться только дискретными вероятностными пространствами. Примеры экспериментов, для которых пространство элементарных исходов несчетное, «непрерывно»:

- время ожидания автобуса, курсирующего с интервалом 10 минут, $\Omega = [0, 10]$
- результат измерения длины предмета, $\Omega = [a, b]$
- время безотказной работы прибора, $\Omega = [0, +\infty)$
- общий семейный доход и расход на питание, $\Omega = [0, +\infty) \times [0, +\infty) = \mathbb{R}_+^2$

Непрерывные вероятностные пространства: продолжение

Итак, пусть ПЭИ Ω несчетное. В этом случае уже не любое подмножество Ω можно считать случайным событием — можно получить противоречие.

Более точно: нельзя в общем случае определить вероятность любого подмножества, так чтобы выполнялись аксиомы вероятности. Еще одна трудность: нельзя строить вероятность по аналогии с дискретным случаем, поскольку, как правило, вероятность каждого элементарного исхода равна нулю.

Непрерывные вероятностные пространства: пример

Поясняющий пример. На отрезке $[3, 4]$ наугад выбирается число. Чему равна вероятность того, что будет выбрано число $\pi = 3.1415926\ldots$? Каждая десятичная цифра имеет шанс быть выбранной, равный $1/10$. Поэтому $.1 \to 1/10$, $.14 \to 1/100$, $.145 \to 1/1000$, ... Вероятность выбрать конкретные n цифр после точки равна $1/10^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Геометрическая вероятность (паллиативный вариант)

Определение

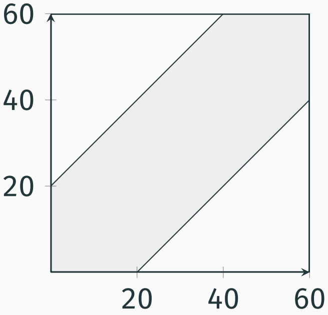
Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана область G, имеющая n-мерный евклидов объем $V(G)$. Выражение «точка x наудачу выбирается в множестве G» означает, что для любой подобласти $K \subset G$ вероятность

$$P(x \in K) = \frac{V(K)}{V(G)}.$$

Геометрическая вероятность: задача о встрече

Два человека приходят на встречу в случайные моменты времени в течение одного часа. Каждый ждет 20 минут (или до конца выбранного часа), затем уходит. Найти вероятность того, что встреча состоялась.

Обозначим x, y, — моменты прихода первого и второго человека. $(x, y) \in Q$:



Встреча произошла, если $|x - y| \leqslant 20$. $P = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = \dfrac{5}{9}$.

Геометрическая вероятность: парадокс Бертрана

Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны правильного треугольника, вписанного в круг?

Из соображений симметрии можно зафиксировать направление хорды. На диаметре, перпендикулярном хорде, середины нужных хорд заполняют его половину. Поэтому искомая вероятность равна $1/2$.

Из соображений симметрии можно зафиксировать один конец хорды. Касательная и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 60°. Нужные хорды лежат только внутри среднего угла, искомая вероятность равна $1/3$.

Чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Середины нужных хорд лежат в концентрическом круге половинного радиуса, искомая вероятность равна $1/4$.

Литература

[1] Sh. Ross. *A First Course in Probability*. 9th ed. London: Pearson, 2014.

[2] Б. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей*. М.: Издательство УРСС, 2005.

[3] С. В. Головань, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. *Сборник задач по курсу теории вероятностей*. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021.

Для заметок