

Теория вероятностей

Домашнее задание 6

Срок сдачи 23 ноября 2023 г., среда

Задача 1. Даны дискретные случайные величины X и Y , их совместное распределение задано таблицей 1.

Таблица 1. Распределение (X, Y)

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	1/8	1/8	0	0
$Y = 1$	0	0	1/8	1/8
$Y = 2$	1/8	1/8	0	0
$Y = 3$	0	0	1/8	1/8

- (1) Найдите маргинальное распределение X .
- (2) Найдите маргинальное распределение Y .
- (3) Найдите $E[X]$.
- (4) Найдите $E[Y]$.
- (5) Найдите условное распределение X при $Y = j$ для $j = 0, \dots, 3$.
- (6) Найдите условное распределение Y при $X = i$ для $i = 0, \dots, 3$.
- (7) Найдите $E[X | Y = j]$ для $j = 0, \dots, 3$.
- (8) Найдите $E[Y | X = i]$ для $i = 0, \dots, 3$.
- (9) Найдите коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$.

Задача 2. Покажите, что если случайные величины X и Y распределены одинаково (и не обязательно независимые), то

$$\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0.$$

Задача 3. Совместная плотность случайных величин X и Y задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

- (1) Являются ли X и Y независимыми?
- (2) Найдите функцию плотности X .
- (3) Найдите $E[X]$.
- (4) Изобразите функцию плотности X и отметьте математическое ожидание $E[X]$ на горизонтальной оси.
- (5) Найдите функцию плотности Y .
- (6) Найдите $E[Y]$.
- (7) Изобразите функцию плотности Y и отметьте математическое ожидание $E[Y]$ на горизонтальной оси.
- (8) Найдите $P\{X + Y < 1\}$.

Задача 4. Совместная плотность случайных величин X и Y задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2x}/x, & \text{если } 0 < x < +\infty, 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите $\text{Cov}(X, Y)$.

Указание: Для нахождения матожиданий $E(X)$ и $E(Y)$ не нужно искать соответствующие маргинальные плотности.