Случайная величина и ее распределение. Дискретные случайные величины

октябрь–декабрь 2023 г.

Курс лекций «Теория вероятностей»

Оглавление

Случайная величина: неформальное определение

ω

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Говоря неформально, случайная величина — это *недетерминированная числовая характеристика*, конкретное значение которой зависит от реализации эксперимента со случайным исходом.

Случайная величина: примеры

- сумма очков при подбрасывании двух кубиков
- время ожидания автобуса
- время непрерывной работы микросхемы
- интервал времени между двумя последовательными звонками на ресепшн
- общее число гербов при двадцатикратном подбрасывании монеты…

и ещё миллион примеров.

Случайная величина: строгое определение

Строгое определение выглядит так:

Определение
Числовая функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если для любого интервала (a, b) множество $\{\omega : \xi(\omega) \in (a, b)\}$ (т. е. прообраз интервала (a, b)) принадлежит множеству событий $\mathcal{F}$.

Определение
Измеримая числовая функция $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*.

$\forall A \quad \{\xi \in A\}$ – событие $(\in \mathcal{F})$

$\exists \; P\{\xi \in A\}.$

Случайная величина: пояснения к определению

Из определения следует, что если задана случайная величина ξ, то следующие подмножества Ω: $\{\omega : \xi(\omega) \leqslant c\} = \{\xi \leqslant c\}$, $\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\} = \{\xi \in [a, b]\}$ и т. п. являются событиями и, следовательно, определены вероятности этих событий.

Случайная величина: распределение

Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_1)$ $\quad P_1(B) = P(\xi \in B)$

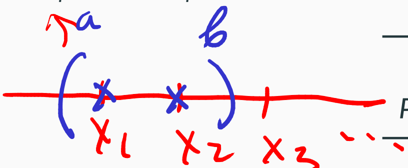
Определение
Семейство вероятностей $\{P(\xi \in B)\}$, где B — произвольное измеримое подмножество числовой прямой (элемент борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}$, B получается из интервалов (a, b) счетным числом операций объединения, пересечения и дополнения), называется *распределением* случайной величины ξ.

Распределение — это максимальная информация, описывающая вероятностное поведение случайной величины.

Дискретные случайные величины

Определение
Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется *дискретной* случайной величиной.

Обозначим все значения, которые принимает величина ξ, через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ... При любом $i = 1, 2, \ldots$ прообраз $\{\xi = x_i\}$ является событием. Обозначим $p_i = P(\xi = x_i)$. Таблица



ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
$P(\xi)$	p_1	p_2	...	p_n	...

$$P(\xi \in (a,b)) = \sum_{i: x_i \in (a,b)} p_i = p_1 + p_2$$

полностью задает распределение величины ξ. При этом числа x_i могут быть любыми, а числа p_i должны удовлетворять условиям $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Дискретные случайные величины: продолжение

Заметим, что если пространство элементарных исходов Ω конечное или счетное, то любая числовая функция на нем автоматически является дискретной случайной величиной (почему?).

Дискретные случайные величины: независимость

$$\xi = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Пусть даны две дискретные случайные величины ξ и η, принимающие значения x_i и y_j соответственно. Они называются независимыми, если $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$ для любых i, j.

$$\frac{1}{4} = P(\xi = 0, \eta = 0) = \underbrace{P(\xi = 0)}_{1/2} \cdot \underbrace{P(\eta = 0)}_{1/2}$$

Схема Бернулли

Предположим, что эксперимент имеет всего два случайных исхода, один из которых условно называется успехом, другой — неудачей. Например,

1. однократное подбрасывание монеты, орел — успех, решка — неудача;
2. случайный выбор жителя региона, поддерживает какой-то законопроект — успех, не поддерживает — неудача;

и т. д.

Будем называть такой эксперимент испытанием с двумя исходами.

Определение
Последовательность *независимых* испытаний с двумя исходами, в которой вероятность успеха в каждом испытании постоянна (не зависит от номера опыта), называется схемой Бернулли.

Бернуллиевская случайная величина

Целесообразно с каждым испытанием с двумя исходами связать случайную величину ε, которая принимает значение 1, если выпал успех и 0, если неудача, т. е. $P(\varepsilon = 1) = p$, $(\varepsilon = 0) = 1 - p$, где p — вероятность появления успеха. Эту случайную величину принято называть Бернуллиевской (с параметром p). Таблица распределения:

ε	0	1
$P(\varepsilon)$	$\cancel{p}$	$\cancel{1 - p}$
	$1-p$	p

Биномиальная случайная величина

Пусть задана схема Бернулли длины n. Обозначим через p вероятность успеха в каждом испытании.

Определение
Общее число успехов в схеме Бернулли длины n называется биномиальной случайной величиной.

Будем обозначать $X \sim B(n, p)$. Ясно, что биномиальная случайная величина принимает целые значения от 0 до n.

$P(X=0) = (1-p)^n$ $\quad$ $P(X=n) = p^n$

Биномиальная случайная величина: сумма бернуллиевских

Естественным образом результат схемы Бернулли можно описать последовательностью $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где независимые $\varepsilon_i = 0$, если в i-м опыте неудача и 1, если успех. (Заметим, что каждая случайная величина ε_i является бернуллиевской.) Тогда биномиальную случайную величину на этом пространстве можно определить так:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

ε_i - бернулл.

Биномиальная случайная величина: распределение

Из соображений независимости припишем каждому элементарному исходу $\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ вероятность $P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$, где k — общее число единиц в ε_i, т. е. в точности $X(\omega)$.

Число исходов $\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, для которых общее число единиц равно k, есть C_n^k — число способов выбрать из n мест k мест, на которые ставятся единицы (на оставшиеся $n-k$ мест автоматически ставятся нули).

Отсюда $p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Таблица:

	1				n-k	1
X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	n
$P(X)$	$C_n^0(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	$\ldots$	$C_n^n p^n$

При этом $\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.

Примеры дискретных распределений: геометрическая случайная величина

Геометрическая случайная величина (распределение). X — число опытов до появления первого успеха в схеме Бернулли. Из соображений независимости получаем распределение:

X	1	2	…	n	…
$P(X)$	p	$(1-p)p$	…	$(1-p)^{n-1}p$	…

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, убеждаемся, что определение корректно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Примеры дискретных распределений: пуассоновская случайная величина

Пуассоновское распределение задается таблицей ($\lambda > 0$ — параметр):

X	0	1	2	…	n	…
$P(X)$	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}$	…	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$	…

Пуассоновское распределение широко используется в моделях массового обслуживания. Оказывается, число заявок, поступивших в систему массового обслуживания за определённый промежуток времени хорошо моделируется пуассоновской случайной величиной.

- число звонков, поступивших в call–center в течение двух часов
- число частиц, зарегистрированных счетчиком Гейгера за час
- число покупателей, посетивших торговый центр от 12:00 до 14:00

Примеры дискретных распределений: гипергеометрическая случайная величина

В партии, состоящей из N изделий, имеется M бракованных. Наудачу выбираются n изделий из этой партии ($n < M$, $n < N - M$). Общее число бракованных изделий X называется гипергеометрической случайной величиной с параметрами (N, M, n). Из комбинаторных соображений получаем:

X	0	1	…	m	…	n
$P(X)$	$\dfrac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	…	$\dfrac{C_M^n C_{N-M}^0}{C_N^n}$

Замечание

Должно выполняться равенство $\sum\limits_{m=0}^{n} C_M^m C_{N-M}^{n-m} = C_N^n$.

Примеры дискретных распределений: равномерная случайная величина

Равномерная дискретная случайная величина принимает значения 1, 2, ..., n с равными вероятностями:

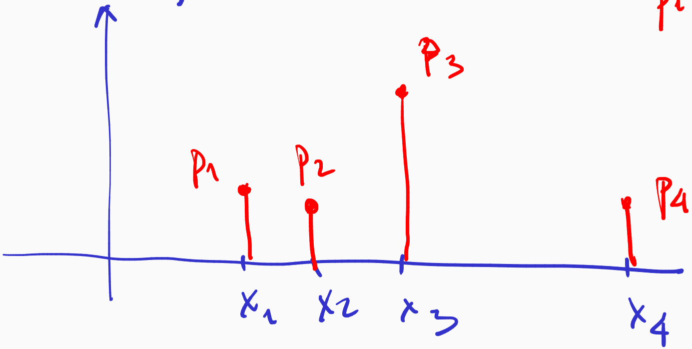
X	1	...	m	...	n
$P(X)$	$1/n$	...	$1/n$	...	$1/n$

Равномерному распределению подчиняется, например, число на верхней грани брошенного кубика.

Для заметок

probability mass function

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$



Функция распределения

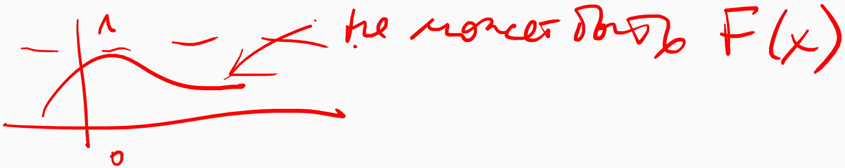
Пусть $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Напомним:

Определение
Семейство вероятностей $\{P(\xi \in B)\}$, где B — произвольное измеримое подмножество числовой прямой (элемент борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}$, B получается из интервалов (a, b) счетным числом операций объединения, пересечения и дополнения), называется *распределением* случайной величины ξ.

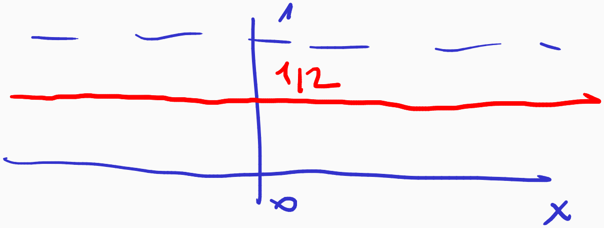
Оказывается, для однозначного определения распределения достаточно знать функцию распределения.

Определение
Числовая функция $F(x) = F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x) = P(\xi \in (-\infty, x])$ называется *функцией распределения* (cumulative distribution function, CDF) случайной величины ξ.

Свойства функции распределения



1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ для любого x — очевидно
2. $F(x)$ — неубывающая функция. Действительно, если $x_1 < x_2$, то $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$ и $F(x_1) = P(\xi \in (-\infty, x_1]) \leqslant P(\xi \in (-\infty, x_2]) = F(x_2)$.



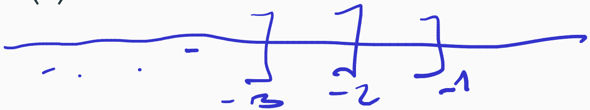
Отступление: свойства монотонных функций

Прежде, чем идти дальше, напомним общие свойства монотонных функций. Пусть $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — неубывающая ограниченная функция. Тогда

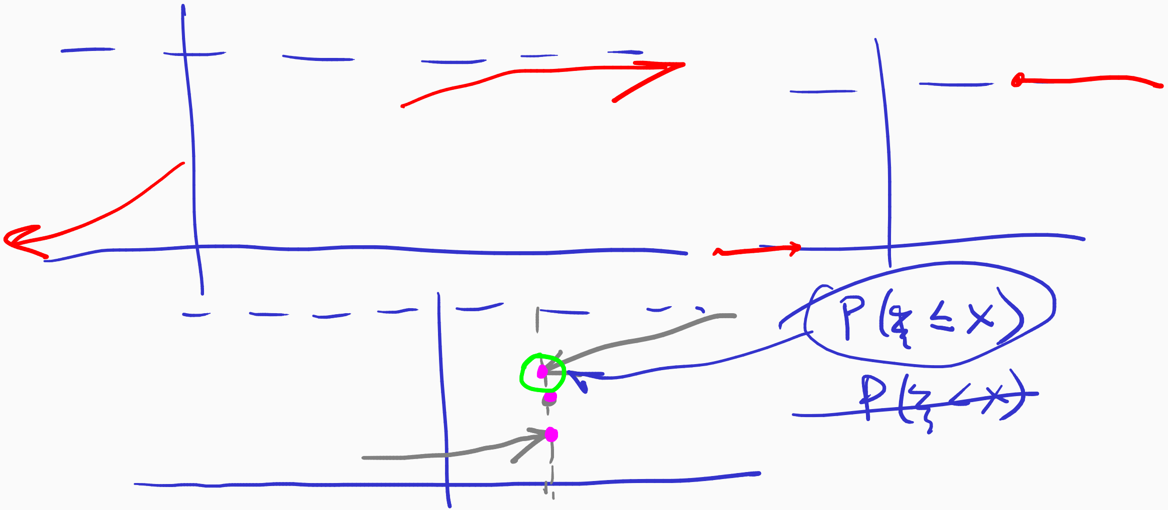
- В каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют пределы слева и справа $\lim_{x \to x_0-} g(x)$ и $\lim_{x \to x_0+} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0-} g(x) = a$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, что $x_n < x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = a$
- Аналогичное утверждение справедливо и для предела справа, а также для пределов при $x \to \pm\infty$

Свойства функции распределения: продолжение

3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Содержательно понятно, а строгое доказательство основано на непрерывности вероятности. Действительно, пусть $A_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_n A_n = \Omega$, откуда $\lim_{n\to\infty} F(n) = 1$ и значит $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ — здесь используется монотонность функции распределения. Аналогично для $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
4. $F(x)$ непрерывна справа, т. е. $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)$. Доказательство тоже основано на непрерывности вероятности. Действительно, пусть $A_n(x) = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x + 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $A_{n+1}(x) \subset A_n(x)$, $\bigcap_n A_n = \{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} F(x + 1/n) = F(x)$ и значит $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)$

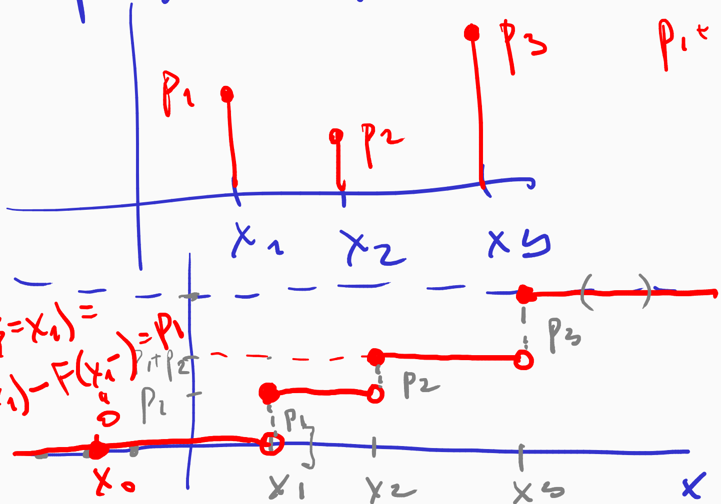


Для заметок



Для заметок

ф. распр. дискр. случ. величины



$P(\xi = x_1) = F(x_1) - F(x_1^-) = p_1$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

1) $x < x_1$

$P(\xi \le x) = \sum_{i:\, x_i \le x} p_i = 0$

2) $x_1 \le x < x_2$ — p_1

3) $x_2 \le x < x_3$ — $p_1 + p_2$

Свойства функции распределения: следствия

1. $P(\xi \in (a, b]) = F(b) - F(a)$. Действительно, $P(\xi \in (a, b]) = P(\{\xi \in (-\infty, b]\} \setminus \{\xi \in (-\infty, a]\}) = P(\xi \in (-\infty, b]) - P(\xi \in (-\infty, a]) = F(b) - F(a)$
2. $P(\xi = x_0) = F(x_0) - F(x_0-) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0-} F(x)$. Действительно, пусть $\cancel{A_n} = \{\omega : \xi \in (x_0 - 1/n, x_0]\}$, тогда $A_{n+1} \subset A_n$ и $\bigcup_n A_n = \{\omega : \xi = x_0\}$. По свойству непрерывности $P(\xi = x_0) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(\xi \in (x_0 - 1/n, x_0]) = \lim_{n\to\infty}(F(x_0) - F(x_0 - 1/n)) = F(x_0) - F(x_0-)$

   $\xi \in [x_0, x_0]$
3. В частности, $P(\xi = x_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $F(x)$ непрерывна в точке x_0
4. $P(\xi \in (a, b)) = F(b-) - F(a)$, $P(\xi \in [a, b)) = F(b-) - F(a-))$

1.5 $P(\xi \in [a, b]) = F(b) - F(a-)$

Функция распределения: в обратную сторону

Справедливо следующее утверждение:

Теорема
Пусть задана функция $F(x)$, обладающая свойствами 1–4. Тогда найдется вероятностное пространство и случайная величина ξ на нем, такие что функция распределения случайной величины ξ равна $F(x)$.

Эта теорема позволяет корректно задавать случайную величину непосредственно с помощью функции распределения, а не как числовое отображение пространства Ω.

Литература

[1] Sh. Ross. *A First Course in Probability*. 9th ed. London: Pearson, 2014.

[2] Б. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей*. М.: Издательство УРСС, 2005.

[3] С. В. Голованъ, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. *Сборник задач по курсу теории вероятностей*. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021.

Для заметок