

# **Случайная величина и ее распределение. Дискретные случайные величины**

---

октябрь–декабрь 2023 г.

Курс лекций «Теория вероятностей»

- Случайная величина
- Распределение дискретной случайной величины
- Примеры дискретных случайных величин
- Функция распределения

## Случайная величина: неформальное определение



Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Говоря неформально, случайная величина — это *недетерминированная числовая характеристика*, конкретное значение которой зависит от реализации эксперимента со случайным исходом.

## Случайная величина: примеры

- сумма очков при подбрасывании двух кубиков
- время ожидания автобуса
- время непрерывной работы микросхемы
- интервал времени между двумя последовательными звонками на ресепшн
- общее число гербов при двадцатикратном подбрасывании монеты...

и ещё миллион примеров.

# Случайная величина: строгое определение

Строгое определение выглядит так:

## Определение

Числовая функция  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *измеримой*, если для любого интервала  $(a, b)$  множество  $\{\omega: \xi(\omega) \in (a, b)\}$  (т.е. прообраз интервала  $(a, b)$ ) принадлежит множеству событий  $\mathcal{F}$ .

## Определение

Измеримая числовая функция  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной*.

$\forall A \quad \{\xi \in A\} - \text{событие } (\in \mathcal{F})$   
 $\exists P \{\xi \in A\}.$

## Случайная величина: пояснения к определению

Из определения следует, что если задана случайная величина  $\xi$ , то следующие подмножества  $\Omega$ :  $\{\omega : \xi(\omega) \leq c\} = \{\xi \leq c\}$ ,  $\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\} = \{\xi \in [a, b]\}$  и т. п. являются событиями и, следовательно, определены вероятности этих событий.

# Случайная величина: распределение

Пусть  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная величина на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

$$\mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_1)$$

$$P_1(B) = P(\xi \in B)$$

## Определение

Семейство вероятностей  $\{P(\xi \in B)\}$ , где  $B$  — произвольное измеримое подмножество числовой прямой (элемент борелевской сигма-алгебры  $\mathcal{B}$ ,  $B$  получается из интервалов  $(a, b)$  счетным числом операций объединения, пересечения и дополнения), называется *распределением* случайной величины  $\xi$ .

Распределение — это максимальная информация, описывающая вероятностное поведение случайной величины.

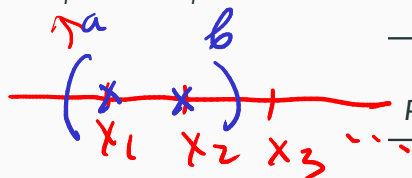


# Дискретные случайные величины

## Определение

Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений, называется *дискретной* случайной величиной.

Обозначим все значения, которые принимает величина  $\xi$ , через  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . При любом  $i = 1, 2, \dots$  прообраз  $\{\xi = x_i\}$  является событием. Обозначим  $p_i = P(\xi = x_i)$ . Таблица



| $\xi$    | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ |
|----------|-------|-------|---------|-------|---------|
| $P(\xi)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ |

$$P(\xi \in (a, b)) = \sum_{i: x_i \in (a, b)} p_i = p_1 + p_2$$

полностью задает распределение величины  $\xi$ . При этом числа  $x_i$  могут быть любыми, а числа  $p_i$  должны удовлетворять условиям  $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$ .



## Дискретные случайные величины: продолжение

Заметим, что если пространство элементарных исходов  $\Omega$  конечное или счетное, то любая числовая функция на нем автоматически является дискретной случайной величиной (почему?).

## Дискретные случайные величины: независимость

$$\xi = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

|       |        |     |     |
|-------|--------|-----|-----|
|       | $\eta$ | 0   | 1   |
| $\xi$ | 0      | 1/4 | 1/4 |
|       | 1      | 1/4 | 1/4 |

Пусть даны две дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , принимающие значения  $x_i$  и  $y_j$  соответственно. Они называются независимыми, если  $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$  для любых  $i, j$ .

$$\frac{1}{4} = P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0)$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

# Схема Бернулли

Предположим, что эксперимент имеет всего два случайных исхода, один из которых условно называется успехом, другой — неудачей. Например,

1. однократное подбрасывание монеты, орел — успех, решка — неудача;
2. случайный выбор жителя региона, поддерживает какой-то законопроект — успех, не поддерживает — неудача;

и т. д.

Будем называть такой эксперимент испытанием с двумя исходами.

## **Определение**

Последовательность *независимых* испытаний с двумя исходами, в которой вероятность успеха в каждом испытании постоянна (не зависит от номера опыта), называется схемой Бернулли.

## Бернуллиевская случайная величина

Целесообразно с каждым испытанием с двумя исходами связать случайную величину  $\varepsilon$ , которая принимает значение 1, если выпал успех и 0, если неудача, т. е.  $P(\varepsilon = 1) = p$ ,  $P(\varepsilon = 0) = 1 - p$ , где  $p$  — вероятность появления успеха. Эту случайную величину принято называть Бернуллиевской (с параметром  $p$ ). Таблица распределения:

| $\varepsilon$    | 0                         | 1                             |
|------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $P(\varepsilon)$ | <del><math>p</math></del> | <del><math>1 - p</math></del> |
|                  | $1 - p$                   | $p$                           |

# Биномиальная случайная величина

Пусть задана схема Бернулли длины  $n$ . Обозначим через  $p$  вероятность успеха в каждом испытании.

## Определение

Общее число успехов в схеме Бернулли длины  $n$  называется биномиальной случайной величиной.

Будем обозначать  $X \sim B(n, p)$ . Ясно, что биномиальная случайная величина принимает целые значения от 0 до  $n$ .

$$P(X=0) = (1-p)^n \quad P(X=n) = p^n$$

## Биномиальная случайная величина: сумма бернуллиевских

Естественным образом результат схемы Бернулли можно описать последовательностью  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , где независимые  $\varepsilon_i = 0$ , если в  $i$ -м опыте неудача и 1, если успех. (Заметим, что каждая случайная величина  $\varepsilon_i$  является бернуллиевской.) Тогда биномиальную случайную величину на этом пространстве можно определить так:

$$X = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

$\varepsilon_i$  - Бернулли.

## Биномиальная случайная величина: распределение

Из соображений независимости припишем каждому элементарному исходу  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  вероятность  $P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$ , где  $k$  — общее число единиц в  $\varepsilon_i$ , т. е. в точности  $X(\omega)$ .

Число исходов  $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ , для которых общее число единиц равно  $k$ , есть  $C_n^k$  — число способов выбрать из  $n$  мест  $k$  мест, на которые ставятся единицы (на оставшиеся  $n - k$  мест автоматически ставятся нули).

Отсюда  $p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Таблица:

| $X$    | 0               | 1                     | ... | $k$                     | $n-k$ | ...         | $n$ |
|--------|-----------------|-----------------------|-----|-------------------------|-------|-------------|-----|
| $P(X)$ | $C_n^0 (1-p)^n$ | $C_n^1 p (1-p)^{n-1}$ | ... | $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ | ...   | $C_n^n p^n$ |     |

При этом  $\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$ .

## Примеры дискретных распределений: геометрическая случайная величина

Геометрическая случайная величина (распределение).  $X$  — число опытов до появления первого успеха в схеме Бернулли. Из соображений независимости получаем распределение:

|        |     |          |     |                |     |
|--------|-----|----------|-----|----------------|-----|
| $X$    | 1   | 2        | ... | $n$            | ... |
| $P(X)$ | $p$ | $(1-p)p$ | ... | $(1-p)^{n-1}p$ | ... |

Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, убеждаемся, что определение корректно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$



## Примеры дискретных распределений: пуассоновская случайная величина

Пуассоновское распределение задается таблицей ( $\lambda > 0$  — параметр):

|        |                |                                   |                                     |     |                                     |     |
|--------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $X$    | 0              | 1                                 | 2                                   | ... | $n$                                 | ... |
| $P(X)$ | $e^{-\lambda}$ | $e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!}$ | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!}$ | ... | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ | ... |

Пуассоновское распределение широко используется в моделях массового обслуживания. Оказывается, число заявок, поступивших в систему массового обслуживания за определённый промежуток времени хорошо моделируется пуассоновской случайной величиной.

- число звонков, поступивших в call-center в течение двух часов
- число частиц, зарегистрированных счетчиком Гейгера за час
- число покупателей, посетивших торговый центр от 12:00 до 14:00

## Примеры дискретных распределений: гипергеометрическая случайная величина

В партии, состоящей из  $N$  изделий, имеется  $M$  бракованных. Наудачу выбираются  $n$  изделий из этой партии ( $n < M$ ,  $n < N - M$ ). Общее число бракованных изделий  $X$  называется гипергеометрической случайной величиной с параметрами  $(N, M, n)$ . Из комбинаторных соображений получаем:

|        |                                 |                                     |     |                                     |     |                                 |
|--------|---------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|---------------------------------|
| $X$    | 0                               | 1                                   | ... | $m$                                 | ... | $n$                             |
| $P(X)$ | $\frac{C_M^0 C_{N-M}^n}{C_N^n}$ | $\frac{C_M^1 C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$ | ... | $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ | ... | $\frac{C_M^n C_{N-M}^0}{C_N^n}$ |

### Замечание

Должно выполняться равенство  $\sum_{m=0}^n C_M^m C_{N-M}^{n-m} = C_N^n$ .

## Примеры дискретных распределений: равномерная случайная величина

Равномерная дискретная случайная величина принимает значения  $1, 2, \dots, n$  с равными вероятностями:

|        |       |     |       |     |       |
|--------|-------|-----|-------|-----|-------|
| $X$    | 1     | ... | $m$   | ... | $n$   |
| $P(X)$ | $1/n$ | ... | $1/n$ | ... | $1/n$ |

Равномерному распределению подчиняется, например, число на верхней грани брошенного кубика.

# Функция распределения

Пусть  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — случайная величина на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Напомним:

## Определение

Семейство вероятностей  $\{P(\xi \in B)\}$ , где  $B$  — произвольное измеримое подмножество числовой прямой (элемент борелевской сигма-алгебры  $\mathcal{B}$ ,  $B$  получается из интервалов  $(a, b)$  счетным числом операций объединения, пересечения и дополнения), называется *распределением* случайной величины  $\xi$ .

Оказывается, для однозначного определения распределения достаточно знать функцию распределения.

## Определение

Числовая функция  $F(x) = F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \in (-\infty, x])$  называется *функцией распределения* (cumulative distribution function, CDF) случайной величины  $\xi$ .

## Свойства функции распределения

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$  для любого  $x$  — очевидно
2.  $F(x)$  — неубывающая функция. Действительно, если  $x_1 < x_2$ , то  $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$  и  $F(x_1) = P(\xi \in (-\infty, x_1]) \leq P(\xi \in (-\infty, x_2]) = F(x_2)$ .

## Отступление: свойства монотонных функций

Прежде, чем идти дальше, напомним общие свойства монотонных функций.  
Пусть  $g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  — неубывающая ограниченная функция. Тогда

- В каждой точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  существуют пределы слева и справа  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = a$  тогда и только тогда, когда существует такая последовательность  $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ , что  $x_n < x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a$
- Аналогичное утверждение справедливо и для предела справа, а также для пределов при  $x \rightarrow \pm\infty$

## Свойства функции распределения: продолжение

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ . Содержательно понятно, а строгое доказательство основано на непрерывности вероятности.

Действительно, пусть  $A_n = \{\omega : \xi(\omega) \leq n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $A_n \subset A_{n+1}$ ,  $\bigcup_n A_n = \Omega$ , откуда  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 1$  и значит  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  — здесь используется монотонность функции распределения. Аналогично для  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

4.  $F(x)$  непрерывна справа, т. е.  $\lim_{y \rightarrow x+} F(y) = F(x)$ . Доказательство тоже основано на непрерывности вероятности. Действительно, пусть  $A_n(x) = \{\omega : \xi(\omega) \leq x + 1/n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $A_{n+1}(x) \subset A_n(x)$ ,  $\bigcap_n A_n(x) = \{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x + 1/n) = F(x)$  и значит  $\lim_{y \rightarrow x+} F(y) = F(x)$

## Свойства функции распределения: следствия

1.  $P(\xi \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ . Действительно,  $P(\xi \in (a, b]) = P(\{\xi \in (-\infty, b]\} \setminus \{\xi \in (-\infty, a]\}) = P(\xi \in (-\infty, b]) - P(\xi \in (-\infty, a]) = F(b) - F(a)$
2.  $P(\xi = x_0) = F(x_0) - F(x_0-) = F(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0-} F(x)$ . Действительно, пусть  $A_n = \{\omega : \xi \in (x_0 - 1/n, x_0]\}$ , тогда  $A_{n+1} \subset A_n$  и  $\bigcup_n A_n = \{\omega : \xi = x_0\}$ . По свойству непрерывности  $P(\xi = x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi \in (x_0 - 1/n, x_0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x_0) - F(x_0 - 1/n)) = F(x_0) - F(x_0-)$
3. В частности,  $P(\xi = x_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $F(x)$  непрерывна в точке  $x_0$
4.  $P(\xi \in (a, b)) = F(b-) - F(a)$ ,  $P(\xi \in [a, b)) = F(b-) - F(a-)$



## Функция распределения: в обратную сторону

Справедливо следующее утверждение:

### **Теорема**

*Пусть задана функция  $F(x)$ , обладающая свойствами 1–4. Тогда найдется вероятностное пространство и случайная величина  $\xi$  на нем, такие что функция распределения случайной величины  $\xi$  равна  $F(x)$ .*

Эта теорема позволяет корректно задавать случайную величину непосредственно с помощью функции распределения, а не как числовое отображение пространства  $\Omega$ .

- [1] Sh. Ross. *A First Course in Probability*. 9th ed. London: Pearson, 2014.
- [2] Б. В. Гнеденко. *Курс теории вероятностей*. М.: Издательство УРСС, 2005.
- [3] С. В. Головань, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. *Сборник задач по курсу теории вероятностей*. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021.

**Для заметок**