Условная вероятность. Независимые события. Формула полной вероятности. Формула Байеса

октябрь–декабрь 2023 г.

Курс лекций «Теория вероятностей»

Оглавление

Условная вероятность: постановка задачи

Вероятность $P(A)$ некоторого случайного события содержательно оценивает шанс появления этого события при осуществлении соответствующего эксперимента со случайным исходом. Предположим, что мы знаем, что в результате эксперимента осуществилось событие B. Как естественным образом, владея этой информацией, пересчитать шанс появления события A?

Условная вероятность: мотивирущий пример

Рассмотрим простейший пример. Один раз подбрасываются два игральных кубика, и событие A означает, что сумма очков равна 5. Нетрудно посчитать, что $P(A) = 4/36 = 1/9$. Предположим, что нам известно, что на первом кубике выпало 3. Это означает, что возможно всего шесть исходов $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$. Только один из этих исходов, $(3,2)$, благоприятствует событию A. Поскольку все эти шесть исходов равновероятны, то мы должны оценить шанс появления события A числом $1/6$. Нетрудно осознать, что для классической схемы $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_N\}$, когда все исходы равновероятны, естественным определением условной вероятности события A при условии события B является число

$$P(A \mid B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_B},$$

где $N_{A \cap B}$, N_B — число элементарных исходов в соответствующих событиях.

Условная вероятность: определение

Но

$$\frac{N_{A\cap B}}{N_B} = \frac{N_{A\cap B}/N}{N_B/N} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

где N — общее число исходов. Это соображение делает естественным следующее

Определение

Пусть A, B — случайные события, и $P(B) \neq 0$. Число $P(A \mid B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ называется условной вероятностью события A при условии B (при условии, что реализовалось событие B).

Из определения следует, что $P(A\cap B) = P(A \mid B)P(B)$.

Условная вероятность: пример

Рассматриваются семьи с двумя детьми.

1. Наугад выбирается семья. Какова вероятность того, что в семье оба мальчики, если известно, что в семье есть мальчик?
   Исходы: (b,b), (b,g), (g,b), (g,g). $A = \{(b,b)\}$, $B = \{(b,b),(b,g),(g,b)\}$.
   $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$.
2. Наугад выбирается ребенок. Известно, что это мальчик. Какова вероятность того, что второй ребенок в этой семье тоже мальчик?
   Исходы: b_b, b_g, g_b, g_g. $A = \{b_b\}$, $B = \{b_b, b_g\}$, $P(A \mid B) = 1/2$.

Правило умножения вероятностей

Из определения условной вероятности вытекает правило умножения вероятностей:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Оно доказывается последовательным применением определения к правой части.

Правило умножения вероятностей: пример

Пусть среди n билетов есть всего один «счастливый». Определим события

$$S_k = \{\text{вытянул счастливый билет на } k\text{-м шаге}\},$$
$$F_j = \{\text{до момента } j \text{ включительно счастливый билет не вытянут}\}.$$

Тогда

$$P(S_k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap S_k) = P(F_1)P(F_2 \mid F_1) \cdots P(S_k \mid F_1 \cap F2 \cap \cdots \cap F_{k-1}).$$

Имеем: $P(S_1) = 1/n$, $P(F_1) = (n-1)/n$, $P(S_2 \mid F_1) = 1/(n-1)$, $P(S_2) = 1/n$, $P(F_2 \mid F_1) = (n-2)/(n-1)$, $P(S_3 \mid F_1 \cap F_2) = 1/(n-2)$, $P(S_3) = 1/n$ и по индукции легко получается, что $P(S_k) = 1/n$ для любого k, то есть, как ни крутись, а лучше все-таки выучить все билеты.

Формула полной вероятности, формула Байеса: Полная группа событий

Определение
Система событий $H_1, \ldots, H_n, \ldots$(конечная или счетная) образует полную группу событий, если

1. $\bigcup_i H_i = \Omega$,
2. $H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Формула полной вероятности

Предложение (формула полной вероятности)
Пусть события $H_1, \ldots, H_n, \ldots$*образуют полную группу. Тогда для любого события* A *выполнено равенство*

$$P(A) = \sum_i P(A \mid H_i) P(H_i)$$

Доказательство.
Обозначим $B_i = A \cap H_i$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$В силу 1 выполнено равенство $A = \bigcup_i B_i$, а в силу 2 — равенства $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Из аддитивности вероятности и определения условной вероятности следует:

$$P(A) = \sum_i P(B_i) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i P(A \mid H_i) P(H_i)$$

$\square$

Формула полной вероятности: пример

Два станка изготавливают одну и ту же деталь. Первый станок изготавливает 60% деталей, брак составляет 3%, второй — 40%, брак составляет 5%. Какова вероятность, что наугад выбранная деталь окажется бракованной?

Формула полной вероятности: разбор примера

Определим события

$$\begin{aligned} A &= \{\text{деталь бракованная}\}, \\ H_1 &= \{\text{деталь изготовлена на первом станке}\}, \\ H_2 &= \{\text{деталь изготовлена на втором станке}\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$P(A) = P(A \mid H1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) = 0.03 \cdot 0.6 + 0.05 \cdot 0.4 = 0.038.$$

Формула Байеса

Предложение (формула Байеса)
Пусть события $H_1, \ldots, H_n, \ldots$*образуют полную группу. Тогда для любого события* A *и индекса* i *выполнено равенство*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A \mid H_j)P(H_j)}.$$

Доказательство.
По определению условной вероятности и по формуле полной вероятности:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{\sum_j P(A \mid H_j)P(H_j)}.$$

$\square$

Формула Байеса: продолжение примера

Наугад выбранная деталь оказалась бракованной, Какова вероятность, что она выпущена первым станком?

Формула Байеса: разбор продолжения примера

По формуле Байеса

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1)P(H_1)}{P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2)} = \frac{0.03 \cdot 0.6}{0.038} = 0.474.$$

Формула Байеса: пример

Специальный тест на выявление некоторой болезни по анализу крови имеет чувствительность 95%, т.е. если пациент имеет болезнь, то тест с вероятностью 0.95 выявит эту болезнь. Однако, если пациент здоров, то тест в 1% случаев тоже покажет наличие болезни (специфичность теста 99%). Известно, что 0.5% всей популяции имеют болезнь. Чему равна вероятность того, что пациент действительно болен, если тест показал наличие болезни?

Формула Байеса: разбор примера

Обозначим события:

$$H_1 = \{\text{наугад выбранный пациент имеет болезнь}\},$$
$$H_2 = \{\text{наугад выбранный пациент здоров}\},$$
$$A = \{\text{тест положителен}\}.$$

Тогда $P(H_1) = 0.005$, $P(H_2) = 0.995$, $P(A \mid H_1) = 0.95$, $P(A \mid H_2) = 0.01$.

По формуле Байеса получаем

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1)P(H_1)}{P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2)} = \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} = 0.323.$$

Результат не слишком интуитивен. Можно дать такое объяснение. В группе 1000 чел. Примерно пять человек имеют болезнь. Примерно у $5 \cdot 0.95 = 4.75$ и $995 \cdot 0.01 = 9.95$ человек тест будет положителен, т. е. доля больных среди людей с положительным тестом есть $4.75/(4.75 + 9.95) = 0.323$.

Независимость двух событий

Событие A не зависит от события B, если $P(A \mid B) = P(A)$. При этом

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

то есть независимость — свойство взаимное.

Определение
Событие A и B, называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Соответственно, не надо накладывать ограничение $P(B) > 0$.

Независимость двух событий: упражнения

1. Покажите, что случайное событие A, для которого $P(A) = 0$ не зависит от любого события.
2. Покажите, что случайное событие A, для которого $P(A) = 1$ не зависит от любого события.
3. Пусть события A и B независимы. Покажите, что независимы события $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$ и $(\overline{A}, \overline{B})$.
4. Пусть $A \cap B = \varnothing$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда A, B зависимы.

Независимость двух событий: пример

Из колоды вытаскивается одна карта, рассмаотриваются события

$$A = \{\text{карта — дама}\},\ B = \{\text{карта трефовой масти}\}.$$

Тогда

$P(A) = 4/52 = 1/13,\ P(B) = 13/52 = 1/4,\ P(A \cap B) = 1/52 = (1/13) \cdot (1/4) = P(A)P(B).$

События, как и ожидалось, независимы.

Независимость семейства событий

Определение
Пусть $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — некоторое семейство случайных событий. Это семейство называется независимым (в совокупности), если

$$P(A_{\gamma_1} \cap \dots \cap A_{\gamma_n}) = P(A_{\gamma_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{\gamma_n})$$

для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $\gamma_i \neq \gamma_j$.

Из независимости следует попарная независимость, обратное неверно.

Независимость семейства событий: пример

Подбрасывается правильный тетраэдр, одна грань которого выкрашена в красный цвет (R), другая — в черный (B), третья — в белый (W), а четвертая — во все три цвета R, B, W. События R и B, W и B, R и W независимы:

$$P(R \cap B) = 1/4 = P(R)P(B), \;\; P(R \cap W) = 1/4 = P(R)P(W), \;\; P(W \cap B) = 1/4 = P(W)P(B),$$

но

$$P(R \cap B \cap W) = 1/4 \neq P(R)P(B)P(W) = 1/8.$$

Литература

[1] Sh. Ross. ***A First Course in Probability.*** 9th ed. London: Pearson, 2014.

[2] Б. В. Гнеденко. ***Курс теории вероятностей.*** М.: Издательство УРСС, 2005.

[3] С. В. Голована, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий. ***Сборник задач по курсу теории вероятностей.*** М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021.

Для заметок